Analisi 2. Quarto Compitino. 04.06.2021

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**null**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

*Campo obbligatorio

1. Email *

2. ISTRUZIONI

Istruzioni di compilazione: Si usi:

· lo slash per indicare la linea di frazione: `2/3` per $\frac{2}{3}$;

· il carattere `^` per indicare la potenza: `2^3` per 2^3;

· le combinazioni `>=` per il maggiore o eguale $\geq$ e `<=` per il minore o eguale $\leq$: `1<=2` per $1 \leq 2$;

· il carattere `_` per indicare l'indice: `a_n` per a_n;

· `sqrt` (preferibile) oppure `^(1/2)` per indicare la radice, dunque `sqrt(2)` oppure `2^(1/2)` per $\sqrt{2}$;

· `exp` (preferibile) oppure `e^` per indicare l'esponenziale, dunque `exp(2)` oppure `e^(2)` per e^2;

· `Pi` per π;

· le parentesi per dirimere tutti i casi di ordine tra le operazioni, per esempio `((1+x)/2)^((x+y)/(x-y))`;

· le parentesi anche per indicare punti e vettori, come in `(1,2,3)`;

· per indicare una sommatoria o una serie come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si può usare `SUM(n=0,infinito)a_n`

La somma dei punteggi degli esercizi fa 40.

ATTENZIONE ALLA SCADENZA DEL TEMPO (1 ora e 15 minuti)

3. Nome *

4. Cognome *

5. Matricola *

6. Spazio per eventuali commmenti/segnalazioni

Domanda 1

Siano $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S \subset \mathbb{R}^3$ definiti da:

$$\vec{f}(x, y, z) := 2z(x + y)\vec{\mathbf{i}} + 2z(x - y))\vec{\mathbf{j}} + 24x^2y^2\vec{\mathbf{k}}$$
$$S := \{(x, y, x) \, : \, x^2 + y^2 = 1 + 2(x - 1)z, 0 \leq z \leq 1\}$$

Diamo per buono che S è una superficie regolare a tratti. Si vede facilmente che S è contenuto nella frontiera di D, dove

$$D := \{(x, y, x) \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 + 2(x - 1)z, 0 \leq z \leq 1\}$$

Consideriamo su S la normale $\hat{\nu}$ uscente da D (la cosa ha senso perché $S \subset \partial D$, come appena detto).

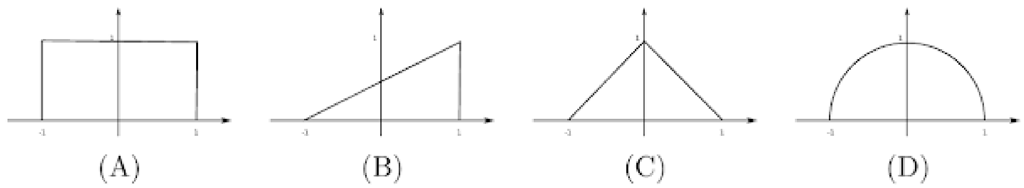
Consideriamo inoltre i punti:

$$P_1 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad P_2 := (1, 0, 1), \qquad P_3 := \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

7.

2 punti

Si indichi quale delle seguenti figure rappresenta la sezione di S nel piano $\{y = 0\}$.



Contrassegna solo un ovale.

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- Nessuna di queste

8.

2 punti

Si dica se è vero che tutte le sezioni di S con un piano $\{z = c\}$, con $0 < c < 1$ (cioè gli insiemi $\{(x, y) : (x, y, c) \in S\}$) sono dei cerchi

Contrassegna solo un ovale.

- Vero
- Falso

9. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

(A) $P_1 \in \Sigma(S)$;
(B) $P_1 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
(C) $P_1 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
(D) $P_1 \notin S$;

Contrassegna solo un ovale.

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

10. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.

(A) $P_2 \in \Sigma(S)$;
(B) $P_2 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
(C) $P_2 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
(D) $P_2 \notin S$;

Contrassegna solo un ovale.

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

11. 2 punti

Si dica quale delle seguenti affermazioni è vera.
(A) $P_3 \in \Sigma(S)$;
(B) $P_3 \in \Sigma^*(S) \setminus \Sigma(S)$;
(C) $P_3 \in S \setminus \Sigma^*(S)$;
(D) $P_3 \notin S$;

Contrassegna solo un ovale.

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

12. 2 punti

Si scriva la normale $\hat{\nu}$ nel punto P_1 o si scriva "non esiste".

13. 6 punti

Si calcoli il flusso $\Phi(\vec{f}, S, \hat{\nu})$ del campo $\vec{f}$ attraverso la superficie orientata $(S, \hat{\nu})$.

14. 3 punti

Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ o si scriva "non esiste".

15. 3 punti

Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove $\vec{F}$ è quello del punto precedente e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è definita da:

$$\gamma(t) := \sin(t)\vec{\mathbf{i}} + \cos(t)\vec{\mathbf{j}}$$

(anche in questo caso la risposta può essere "non esiste").

Domanda 2

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -x - 2y - 4t \\ y' = 8x + 3y - 12z + 5t \\ z' = -y - z - 2t \end{cases} \tag{Sys}$$

che è associato alla matrice costante A e al termine noto $B(t)$ dati da:

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 8 & 3 & -12 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B(t) := \begin{bmatrix} -4t \\ 5t \\ -2t \end{bmatrix}.$$

Diamo per buono che il polinomio caratteristico di A è $p(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$.

16.

2 punti

La matrice di Jordan di A ha:
(A) un solo blocco di Jordan;
(B) due blocchi di Jordan;
(C) tre blocchi di Jordan;

Contrassegna solo un ovale.

- (A)
- (B)
- (C)

17.

5 punti

Si trovi una soluzione di (Sys) della forma:

$$x(t) = a\,t, \quad y(t) = -1 + b\,t, \quad z(t) = c\,t$$

con a, b, c da determinare in $\mathbb{R}$ (eventualmente si risponda "non esiste").

18. 6 punti

Si trovi LA soluzione $Y(t)$ di (Sys) verificante la condizione iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.
Suggerimento : Si cerchi Y della forma $Y = Y_0 + \bar{Y}$ con Y_0 soluzione del sistema omogeneo.

19. 3 punti

Si dica se il sistema (Sys) ammette (almeno) una soluzione costante.

Contrassegna solo un ovale.

- Sì
- No